L'ANALYSE DES OBJETS TRIDIMENSIONNELS

Thomas C. HENDERSON et Naamen KESKES

Résumé - L'analyse des objets tridimensionnels et la détermination de leurs orientations dans l'espace sont deux problèmes fondamentaux des systèmes de vision robotiques. De plus, dans l'automatisation industrielle ces tâches doivent être rapides et précises. Une représentation simple des objets tridimensionnels est donnée ; elle permet la reconnaissance et la détermaination de l'orientation à 3-D. Cette méthode est une extension de la transformation de Hough à 2-D pour la reconnaissance des surfaces tridimensionnelles.

INRIA, Domaine de Voluceau-Rocquencourt, B.P. 105, 78153 LE CHESNAY, France.

1. Introduction

La transformation de Hough permettant la reconnaissance des formes 2-D décrite par Davis et Yam [1] ou Sloan et Ballard [2] est une généralisation de la transformation de Hough [3,4]. La transformation à 2-D est, en général, appliquée aux images de contours, à (3-D) la méthode est appliquée directement aux images de distances acquises avec un laser. Si I (i,j) est la distance du point i,j par rapport à un plan de référence, alors (i,j, I (i,j)) est la localisation d'un point (x,y,z) sur la surface d'un objet (ou du fond). Dans la section 2, on décrit une représentation des objets tridimensionnels, on donne un algorithme pour la reconnaissance des objets translatés et on démontre l'unicité du résultat. La section 3 illustre l'utilisation de la méthode pour la reconnaissance des objets déplacés par rotation. Dans la dernière section, on propose des méthodes de compréssions des données et on étudie les limites de la technique.

2. Transformation de Hough à 3-D Invariante à la Translation

Etant donné $P = \{(x_i, y_i, z_i)\}$, $i = 1,n$, les coordonnées d'un objet 3-D, on choisit un point de référence, $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$; par exemple, le centroïd de l'objet. Sa représentation $\mathcal{O}(P, P_0)$, est définie par $\mathcal{O} = \{(dx_i, dy_i, dz_i)\}$, ou $dx_i = x_0 - x_i$, $dy_i = y_0 - y_i$ et $dz_i = z_0 - z_i$.

Ainsi, $\mathcal{O}$ caractérise P, comme le déplacement de chaque point de P par rapport au point de référence P_0.

Etant donné $D = \{(x_i, y_i, z_i)\}$, $i = 1,m$, un ensemble de points détectés, et une matrice tridimensionnelle la transformation de Hough est calculée d'une façon algorithmique, c'est-à-dire :

$\forall p = (x_i, y_i, z_i) \in D$ et

$\forall \Delta = (dx, dy, dz) \in \mathcal{O}$

on ajoute 1 à H (x + dx, y + dy, z +dz).

Les coordonnées de la valeur maximale de H correspondent aux coordonnées du point de référence P_0 de l'objet.

Montrons qu'il n'existe qu'une seule valeur maximale et que cette valeur est égale à n.

Supposons que $P = \{(x_i, y_i, z_i)\}$, $i = 1,n$ est telle que

$(x_i, y_i, z_i) = (x_j, y_j, z_j) \rightarrow i = j$.

$\mathcal{O}(P,P_0) = \{x_0-x_i, y_0-y_i, z_0-z_i)\}$, $i = 1,n$ et que D est la translation de P, c'est-à-dire,

$D = \{(x_i+\Delta x, y_i+\Delta y, z_i+\Delta z)\}$, $i = 1,n$

En combinant (P, P_0) avec D selon l'algorithme précédent, nous obtenons n^2 nouvelles positions :

$$(1.1) \qquad (x_1 + \Delta x + x_0 - x_1,\ y_1 + \Delta y + y_0 - y_1,\ z_1 + \Delta z + z_0 - z_1)$$

$$(1.2) \qquad (x_1 + \Delta x + x_0 - x_2,\ y_1 + \Delta y + y_0 - y_2,\ z_1 + \Delta z + z_0 - z_2)$$

$$\vdots$$

$$(1.n) \qquad (x_1 + \Delta x + x_0 - x_n,\ y_1 + \Delta y + y_0 - y_n,\ z_1 + \Delta z + z_0 - z_n)$$

$$(2.1) \qquad (x_2 + \Delta x + x_0 - x_1,\ y_2 + \Delta y + y_0 - y_1,\ z_2 + \Delta z + z_0 - z_1)$$

$$(2.2) \qquad (x_2 + \Delta x + x_0 - x_2,\ y_2 + \Delta y + y_0 - y_2,\ z_2 + \Delta z + z_0 - z_2)$$

$$\vdots$$

$$(2.n) \qquad (x_2 + \Delta x + x_0 - x_n,\ y_2 + \Delta y + y_0 - y_n,\ z_2 + \Delta z + z_0 - z_n)$$

$$\vdots$$

$$(n.1) \qquad (x_n + \Delta x + x_0 - x_1,\ y_n + \Delta y + y_0 - y_1,\ z_n + \Delta z + z_0 - z_1)$$

$$(n.2) \qquad (x_n + \Delta x + x_0 - x_2,\ y_n + \Delta y + y_0 - y_2,\ z_n + \Delta z + z_0 - z_2)$$

$$\vdots$$

$$(n.n) \qquad (x_n + \Delta x + x_0 - x_n,\ y_n + \Delta y + y_0 - y_n,\ z_n + \Delta z + z_0 - z_n)$$

Les position $i.i, i = 1,n$ correspondent tous à la même position

$P_{0_t} = x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y, z_0 + \Delta z$; qui n'est autre que la position du P_0

translaté par $(\Delta x, \Delta y, \Delta z)$ d'où $H(x_0+\Delta x,\ y_0+\Delta y,\ z_0+\Delta z) = n$. Pour

montrer l'unicité de cette position, il suffit de montrer qu'il ne peut exister n positions ou plus choisies parmi $i.j, i = 1,n$ et $j=1,n$ et $i \neq j$ qui soient toutes égales. Pour cela nous montrons qu'il ne peut pas exister deux positions $i.\ell$ et $i.m$ qui sont égales.

Supposons que $\ell \neq m$. Pour que $i.\ell$ et $i.m$ représent la même position il faut que :

$$(x_i + \Delta x + x_0 - x_\ell,\ y_i + \Delta y + y_0 - y_\ell,\ z_i + \Delta z + z_0 - z_\ell)$$

$$= (x_i + \Delta x + x_0 - x_m,\ y_i + \Delta y + y_0 - y_m,\ z_i + \Delta z + z_0 - z_m). \text{ Mais}$$

$$\left.\begin{array}{r} x_i - x_\ell = x_i - x_m \\ \text{et } y_i - y_\ell = y_i - y_m \\ \text{et } z_i - z_\ell = z_i - z_m \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x_\ell = x_m \\ \text{et } y_\ell = y_m \\ \text{et } z_\ell = z_m \end{array}\right\} \Rightarrow \ell = m$$

Alors, au maximun n positions sont égales et la seule façon de les choisir c'est de sélectionner pour chaque $i = 1,n$ une position $(i.j_i)$ avec $1 \leq j_i \leq n$ et $i \neq j_i$. Comme on a vu précédemment, pour deux position (i,j) et(i', j') on a $i \neq i'$; il suit que $j \neq j'$. Nous avons enfin, les n positions :

$$(x_i + \Delta x + x_0 - x_{\sigma_i},\ y_i + \Delta y + y_0 - y_{\sigma_i},\ z_i + \Delta z + z_0 - z_{\sigma_i}),\ i = 1,n$$

ou $\{\sigma_i\} = \{1,2,\ldots,n\}$. Mais si elles représentent la même positions, alors :

$$x_1 - x_{\sigma_1} = x_2 - x_{\sigma_2} = \ldots = x_n - x_{\sigma_n}$$

et $$y_1 - y_{\sigma_1} = y_2 - y_{\sigma_2} = \ldots = y_n - y_{\sigma_n}.$$

et $$z_1 - z_{\sigma_1} = z_2 - z_{\sigma_2} = \ldots = z_n - z_{\sigma_n}.$$

Supposons que $x_i - x_{\sigma_i} = c, y_i - y_{\sigma_i} = d$ et $z_i - z_{\sigma_i} = e$.

alors $\sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{\sigma_i}) = nc$ et $\sum_{i=1}^{n} (y_i - y_{\sigma_i}) = nd$ et $\sum_{i=1}^{n} (z_i - z_{\sigma_i}) = ne$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} x_i - \sum_{i=1}^{n} x_{\sigma_i} = nc \text{ et } \sum_{i=1}^{n} y_i - \sum_{i=1}^{n} y_{\sigma_i} = nd \text{ et}$$

$$\sum_{i=1}^{n} z_i - \sum_{i=1}^{n} z_{\sigma_i} = ne$$

$$\Rightarrow 0 = nc \text{ et } 0 = nd \text{ et } 0 = ne \Rightarrow c = d = e = 0$$

$$\Rightarrow (x_i, y_i, z_i) = (x_{\sigma_i}, y_{\sigma_i}, z_{\sigma_i})\ \forall i,\ i = \sigma_i.$$

Le Tableau 1 (a) donne les coordonnées d'un cube, P (les 26-voisinage de $(0,0,0) = P_0$), et le Tableau 1 (b) donne D, la version translatée ($\Delta x = \Delta y = \Delta z = 5$) de ce cube. Le Tableau 1 (a) est aussi la représentation, $\mathcal{O}(P,P_0)$, de l'objet.

x	y	z
-1	-1	-1
-1	-1	0
-1	-1	1
-1	0	-1
-1	0	0
-1	0	1
-1	1	-1
-1	1	0
-1	1	1
0	-1	-1
0	-1	0
0	-1	1
0	0	-1
0	0	1
0	1	-1
0	1	0
0	1	1
1	-1	-1
1	-1	0
1	-1	1
1	0	-1
1	0	0
1	0	1
1	1	-1
1	1	0
1	1	1

(a)

x	y	z
4	4	4
4	4	5
4	4	6
4	5	4
4	5	5
4	5	6
4	6	4
4	6	5
4	6	6
5	4	4
5	4	5
5	4	6
5	5	4
5	5	6
5	6	4
5	6	5
5	6	6
6	4	4
6	4	5
6	4	6
6	5	4
6	5	5
6	5	6
6	6	4
6	6	5
6	6	6

(b)

Tableau 1. Représentation d'un cube : (a) centré à l'origine, et (b) centré à (5,5,5).

Une matrice, H (10,10,10), est utilisé pour calculer la transformation de Hough à 3-D. Les plans Z = constante dont un des éléments est différent de zéro sont donnés dans le Tableau 2(a). Comme on peut voir, la veleur maximale est située au point (5,5,5) de H ; ceci indique la position du cube P après translation. Il est claire que si tous les points de P ne se trouvent pas dans D, alors plusieurs maximums peuvent exister ; le point de référence est un de ces maximums.

3. La Translation de Hough à 3-D Invariante au Déplacement Par Rotation.

Etant donné un ensemble de points $D = \{(x_i, y_i, z_i)\}, i = 1,m$, et une représentation, $\mathcal{O}$, d'un objet on définit un ensemble de rayons, $R = \{r_i\}, i = 1,k$ ou les r_i représentent toutes les longueurs distinctes de vecteurs dans $\mathcal{O}$. On associe à chaque $r \in R$ une liste, S_r, de points de la surface d'une sphère de rayon r. La transformation de Hough à 3-D invariante au déplacement par rotation est calculé de la façon suivante :

$\forall p = (x,y,z) \in D$

Z=3

0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	2	3	2	1	0	0	0
0	0	2	4	6	4	2	0	0	0
0	0	3	6	9	6	3	0	0	0
0	0	2	4	6	4	2	0	0	0
0	0	1	2	3	2	1	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Z=4

0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	2	4	6	4	2	0	0	0
0	0	4	6	10	6	4	0	0	0
0	0	6	10	16	10	6	0	0	0
0	0	4	6	10	6	4	0	0	0
0	0	2	4	6	4	2	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Z=5

0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	3	6	9	6	3	0	0	0
0	0	6	10	16	10	6	0	0	0
0	0	9	16	26	16	9	0	0	0
0	0	6	10	16	10	6	0	0	0
0	0	3	6	9	6	3	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Z=6

0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	2	4	6	4	2	0	0	0
0	0	4	6	10	6	4	0	0	0
0	0	6	10	16	10	6	0	0	0
0	0	4	6	10	6	4	0	0	0
0	0	2	4	6	4	2	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Z=7

0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	2	3	2	1	0	0	0
0	0	2	4	6	4	2	0	0	0
0	0	3	6	9	6	3	0	0	0
0	0	2	4	6	4	2	0	0	0
0	0	1	2	3	2	1	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Tableau 2 (a). Transformation de Hough Invariante à Translation.

Z=3

0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	1	1	1	0	0	0	0
0	0	1	5	6	5	1	0	0	0
0	0	1	6	6	6	1	0	0	0
0	0	1	5	6	5	1	0	0	0
0	0	0	1	1	1	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Z=4

0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	1	1	1	0	0	0	0
0	0	1	5	6	5	1	0	0	0
0	1	5	12	14	12	5	1	0	0
0	1	6	14	17	14	6	1	0	0
0	1	5	12	14	12	5	1	0	0
0	0	1	5	6	5	1	0	0	0
0	0	0	1	1	1	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Z=5

0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	1	1	1	0	0	0	0
0	0	1	6	6	6	1	0	0	0
0	1	6	14	17	14	6	1	0	0
0	1	6	17	24	17	6	1	0	0
0	1	6	14	17	14	6	1	0	0
0	0	1	6	6	6	1	0	0	0
0	0	0	1	1	1	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Z=6

0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	1	1	1	0	0	0	0
0	0	1	5	6	5	1	0	0	0
0	1	5	12	14	12	5	1	0	0
0	1	6	14	17	14	6	1	0	0
0	1	5	12	14	12	5	1	0	0
0	0	1	5	6	5	1	0	0	0
0	0	0	1	1	1	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Z=7

0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	1	1	1	0	0	0	0
0	0	1	5	6	5	1	0	0	0
0	0	1	6	6	6	1	0	0	0
0	0	1	5	6	5	1	0	0	0
0	0	0	1	1	1	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Tableau 2 (b). Invariante à Déplacement par Rotation et Translation.

$\forall r \in R$

$\forall s = (dx, dy, dz) \in S_r$

On ajoute 1 à H (x+dx, y+dy, z+dz).

Le point de référence, P_0, pour la représentation $\mathcal{O}$ d'un objet est un maximum de H, mais ce maximum peut ne pas être unique. Même si le maximum correspond à P_0, l'orientation de l'objet reste inconnu. Davis a suggéré dans le cas 2-D, de prendre 2 points de référence, P_0 et P_0', d'où 2 représentations, $\mathcal{O}$ et $\mathcal{O}'$.

De cette façon, le vecteur P_0P_0' permet de déterminer l'orientation de l'objet.

La généralisation nécessite 3 points de référence.

Il faut définir une sphère digitale. S_r est définie de la façon suivante. On choisit le nombre de tranches, s, d'une sphère continu comme $s = 2r + 1$, puis on choisit $z = r \cdot \cos(\phi)$ avec ϕ variante de 0 à π avec une pas de $\frac{\pi}{(s-1)}$. Dans le plan z=cte le rayon r_z est = $|r \cdot \sin(\phi)|$. Le nombre d'échantillons de ce cercle est $s_2 = 2r_z + 1$. Ainsi, étant donné un point (i,j,k) et un rayon, r, ajoute 1 à tous les points correspondants aux points de la surface de la sphère digitale. La transformation du cube est donné dans le Tableau 2(b). Considérons l'objet P (le cube) déplacé par une rotation de 45° autour de l'axe x et puis 45° autour de l'axe y, et puis translaté de $\Delta x = \Delta y = \Delta z = 5$ (tableau 3). Tableau 4 donne la matrice, H, de cet objet. A cause des déplacements, des points de P suivant la rotation, le maximum de H est maintenant 20 au lieu de 26.

4. Conclusion

L'inconvénient majeur de cette méthode est l'occupation de la mémoire par le tableau H. Pour remédier à cet inconvévient, il est donc nécessaire de comprimer l'information. Pour ce faire, on fait correspondre chaque face, f_i, d'un objet à 3-D avec un point (a_i, b_i, c_i, d_i) de l'espace Euclidean à 4-D, ou a_i, b_i, c_i et d_i sont les coefficients qui définissent le plan contenant f_i (pour trouver les faces, voir Duda et al [5]). Le nombre de faces est généralement faible et les points correspondants au faces peuvent être gardés dans une liste au lieu d'une matrice à 4-D. En plus, les nombres flottants peuvent être utilisés, ce qui réduit considérablement les problèmes qui se posent dans l'espace digital à 3-D (voir Henderson et Mitiche [6]).

Une autre possibilité est de rester dans 3-D, mais on n'utilise que des sommets de l'objet. Si le nombre de points qui décrivent l'objet est faible, alors le choix du point de référence peut devenir important. 3 points peuvent être utilisés : (1) la centroïd de l'objet, (2) le point qui minimise la distance maximale entre le point de référence et points de l'objet, et (3) le point qui minimise le nombre de distances distintes entre le point de référence et les points de l'objet ; (1) est facile à calculer, (2) minimise la taille de la matrice H, et (3) minimise le nombre de rayons distincts d'un modèle d'un objet.

x	y	z
5	5	3
5	5	5
4	4	4
5	6	4
4	5	4
4	4	5
4	6	4
4	6	5
3	5	5
6	5	4
6	4	4
5	4	5
6	6	4
4	4	6
5	6	5
5	6	6
4	5	6
5	7	7
6	4	5
6	4	6
6	6	5
6	5	6
5	4	6
6	6	6
4	6	6
5	5	7

Tableau 3. Les points du Cube Déplacé par Rotation et Translation.

Bibliographie

1. Davis, L.S et S. Yam "A generalized Hough-like Transformation for Shape Recognition", TR-134, Univ. of Texas, Feb. 1980.

2. Sloan, K.R. et D.M. Ballard, "Exprerience With the Generalized Hough Transform", Image Understanding Workshop, April 1980, pp. 150-156.

3. Hough, P.V.C., Method and Means for Recognizing Complex Patterns, U.S. Patent 3069654, 1962.

4. Rosenfeld, A. et A. Kak, Digital Picture Processing, Academic Press, N.Y., 1976, p. 379.

5. Duda, T.O., D. Nitzan et Barrett, "Use of Range and Reflectance Data to Find Planar Surface Regions", IEEE Trans. Pattern Anal. Machine Intell., Vol. PAMI-1, N°3, July 1979, pp. 259-271.

6. Henderson, T. and A. Mitiche, "The Hough Transformation of 3-D Objects", (submitted to IJCAI 81, Vancouver, Canada).

	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Z=1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Z=2	0	0	0	1	2	1	0	0	0	0
	0	0	0	2	2	2	0	0	0	0
	0	0	0	1	2	1	0	0	0	0
	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	0	0	0	1	2	1	0	0	0	0
	0	0	1	6	7	6	1	0	0	0
Z=3	0	0	3	6	4	6	3	0	0	0
	0	0	1	6	7	6	1	0	0	0
	0	0	0	1	2	1	0	0	0	0
	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	0	0	0	1	1	1	0	0	0	0
	0	0	1	5	5	5	1	0	0	0
	0	1	6	10	13	10	6	1	0	0
	0	2	6	12	16	12	6	2	0	0
Z=4	0	1	6	10	13	10	6	1	0	0
	0	0	1	5	5	5	1	0	0	0
	0	0	0	1	1	1	0	0	0	0
	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	0	0	0	1	1	1	0	0	0	0
	0	0	2	5	6	5	2	0	0	0
	0	2	7	13	13	13	7	2	0	0
	1	2	4	16	20	16	4	2	1	0
Z=5	0	2	7	13	13	13	7	2	0	0
	0	0	2	5	6	5	2	0	0	0
	0	0	0	1	1	1	0	0	0	0
	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Tableau 4. Transformation du Cube de Tableau 3

Z=6

0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	1	1	1	0	0	0	0
0	0	1	5	5	5	1	0	0	0
0	1	6	10	13	10	6	1	0	0
0	2	6	12	16	12	6	2	0	0
0	1	6	10	13	10	6	1	0	0
0	0	1	5	5	5	1	0	0	0
0	0	0	1	1	1	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Z=7

0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	1	2	1	0	0	0	0
0	0	1	6	7	6	1	0	0	0
0	0	3	6	4	6	3	0	0	0
0	0	1	6	7	6	1	0	0	0
0	0	0	1	2	1	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Z=8

0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	1	2	1	0	0	0	0
0	0	0	2	2	2	0	0	0	0
0	0	0	1	2	1	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Z=9

0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Z=10

0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Tableau 4. Transformation du Cube de Tableau 3 (suite).