

ژئودزیک‌ها در گرانش جرم‌دار رنگین کمانی

هندی، سید حسین؛ توکلی، امیر محمد؛ مؤمن‌نیا، مه‌راب

بخش فیزیک و رصد خانه ابوریحان بیرونی، دانشکده علوم، دانشگاه شیراز، شیراز ۷۱۴۵۴

چکیده

در این مقاله جواب های گرانش جرم‌دار رنگین کمانی را در E بعد مورد مطالعه قرار داده و تأثیر توابع رنگین کمانی و جرم‌دار شدن گراویتون‌ها را بر معادلات ژئودزیک مورد بررسی قرار می‌دهیم. با استفاده از فرمول‌بندی لاگرانژی، معادلات ژئودزیک را استخراج کرده و در ادامه با توجه به حل عددی آن‌ها به دنبال جواب‌های معادلات ژئودزیک خواهیم بود. همچنین برای یافتن تأثیرات توابع رنگین کمانی و جرم‌دار شدن گراویتون‌ها چندین مدار قابل توجه را رسم می‌کنیم.

Geodesics in massive gravity's rainbow

Hendi, Seyed Hossein; Tavakkoli, Amir Mohammad; Momennia, Mehrab

Physics Department and Biruni Observatory, College of Sciences, Shiraz University 71454, Shiraz

Abstract

In this paper, we study the solutions of massive gravity's rainbow in four dimensions and investigate the effects of rainbow functions and massive gravitons on the geodesic equations. Following Lagrangian formalism, we can derive all geodesic equations. Then by considering numerical analysis, we will look for the solutions of geodesic equations. Also, in order to find the effects of rainbow functions and massive gravitons, we plot some interesting orbits.

PACS No. 04

مقدمه

نور برسد. تعمیم نسبیت خاص دوگان به فضا زمان خمیده را گرانش رنگین کمانی می‌گویند. در چارچوب گرانش رنگین کمانی ذرات با انرژی مختلف، براساس طول موجشان به صورت مختلفی تحت تأثیر ساختار فضا زمان قرار می‌گیرند [۳].

گرانش رنگین کمانی را می‌توان با تغییر رابطه‌ی انرژی-تکانه به صورت $E^2 f(\epsilon)^2 - P^2 g(\epsilon)^2 = m^2$ ساخت، که در آن $\epsilon = E/E_p$ ، E انرژی ذره آزمونی است که در فضا زمان حرکت می‌کند، و توابع $f(\epsilon)$ و $g(\epsilon)$ توابع رنگین کمانی نامیده می‌شوند. لازم به ذکر است برای آن که رابطه‌ی استاندارد انرژی-تکانه در حد مادون قرمز بدست آید، توابع رنگین کمانی باید از رابطه‌ی زیر پیروی کنند:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} f(\epsilon) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} g(\epsilon) = 1 \quad (1)$$

اخیراً جنبه‌های نظری گرانش رنگین کمانی در موضوعات مختلفی مورد بررسی قرار گرفته است [۸-۶]. انواع مختلف سیاهچاله‌ها با میدان‌های پیمانه‌ای مختلف در [۱۱-۹] مورد مطالعه

نسبیت عام نظریه‌ی موفقی در حوزه گرانش است اما موضوعاتی مانند انبساط شتاب‌دار عالم و گراویتون‌های جرم‌دار وجود دارد که نسبیت عام اینشتین نمی‌تواند آن را به خوبی توضیح دهد. به همین دلیل بهتر است که نسبیت عام اصلاح شود. نظریه‌هایی مانند گرانش $F(R)$ [۱]، گرانش لاولاک [۲]، گرانش رنگین کمانی [۳] و گرانش جرم‌دار [۴] سعی در اصلاح نظریه نسبیت عام دارند. از سوی دیگر می‌دانیم که نسبیت عام نظریه‌ای است که در ناحیه مادون قرمز بسیار معتبر است؛ اما در ناحیه‌ی فرابنفش نتایج دقیقی را ارائه نمی‌دهد. این نکته نیازمند آن است که اصلاحی در نسبیت عام صورت گیرد تا ناحیه فرابنفش را نیز شامل شود. برای این کار می‌توان از تعمیم گرانشی نسبیت خاص دوگان [۳و۵] استفاده نمود که در آن دو حد بالا، یکی سرعت نور (c) و دیگری انرژی پلانک (E_p) وجود دارد. در این نظریه برای ذره غیر ممکن است که به انرژی بالاتر از انرژی پلانک و سرعتی بیشتر از سرعت

$$R_{\mu\nu} - \left(\frac{R}{2} - \Lambda\right)g_{\mu\nu} - \left(2F_{\mu\alpha}F_{\nu}^{\alpha} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}F^2\right) + m^2\chi_{\mu\nu} = 0 \quad (4)$$

$$\partial_{\mu}(\sqrt{-g}F^{\mu\nu}) = 0$$

که در آن $\chi_{\mu\nu}$ به صورت زیر تعریف می شود:

$$\chi_{\mu\nu} = -\frac{c_1}{2}(U_1g_{\mu\nu} - K_{\mu\nu}) - \frac{c_2}{2}(U_2g_{\mu\nu} - 2U_1K_{\mu\nu} + 2K_{\mu\nu}^2) - \frac{c_3}{2}(U_3g_{\mu\nu} - 3U_2K_{\mu\nu} + 6U_1K_{\mu\nu}^2 - 6K_{\mu\nu}^3) - \frac{c_4}{2}(U_4g_{\mu\nu} - 4U_3K_{\mu\nu} + 12U_2K_{\mu\nu}^2 - 24U_1K_{\mu\nu}^3 + 24K_{\mu\nu}^4) \quad (5)$$

جملات گرانج جرم دار با در نظر گرفتن متریک مرجع به صورت $f_{\mu\nu} = \text{diag}\left(0, 0, \frac{c^2}{g(\varepsilon)}, \frac{c^2 \sin(\theta)}{g(\varepsilon)}\right)$ در چهار بعد ساخته می شوند. می توانیم تنها جملات غیر صفر U_i ها را، به صورت $U_1 = \frac{2c}{r}$ و $U_2 = \frac{2c^2}{r^2}$ بدست آوریم که در آن c یک ثابت مثبت است.

متریک فضازمان را در گرانج رنگین کمانی به صورت زیر در نظر می گیریم:

$$ds^2 = -\frac{\psi(r)}{f(\varepsilon)^2}dt^2 + \frac{1}{g(\varepsilon)^2}\left[\frac{dr^2}{\psi(r)} + r^2(d\theta^2 + \sin^2(\theta)d\phi^2)\right] \quad (6)$$

که با استفاده از معادله های (4) و پتانسیل پیمانه ای $A_{\mu} = h(r)\delta_{\mu}^0$ تانسور میدان الکترومغناطیسی به صورت $F_{tr} = -F_{rt} = \frac{q}{r^2}$ در می آید که در آن q یک ثابت انتگرال گیری متناسب با بار الکتریکی کل است. همچنین می توان تابع متریک $\psi(r)$ را با استفاده از معادله های (4) و (6) به شکل زیر محاسبه کرد:

$$\psi(r) = 1 - \frac{m_0}{r} - \frac{\Lambda}{3g(\varepsilon)^2}r^2 + \frac{q^2f(\varepsilon)^2}{r^2} + \frac{m^2}{g(\varepsilon)^2}\left\{\frac{cc_1r}{2} + c^2c_2\right\} \quad (7)$$

که m_0 ثابت انتگرال گیری و متناسب با جرم کل سیاهچاله است.

معادلات ژئودزیک

لاگرانژی را برای بدست آوردن معادلات ژئودزیک به صورت زیر می نویسیم:

$$L = \varepsilon = -g_{\mu\nu}\frac{dx^{\mu}}{d\lambda}\frac{dx^{\nu}}{d\lambda} \quad (8)$$

که در آن λ پارامتر آفین و ε برای ذره بدون جرم و جرم دار به ترتیب مقدار صفر و یک را دارد. برای حل معادله ی (8) از رابطه ی اویلر- لاگرانژ استفاده می کنیم:

$$\frac{d}{d\lambda}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^{\mu}}\right) - \frac{\partial L}{\partial x^{\mu}} = 0 \quad (9)$$

قرار گرفته اند. همچنین تأثیر توابع رنگین کمانی بر نیروی گرانژی در [۱۲] بررسی شده است. یکی دیگر از روش هایی که برای تعمیم نسبیت عام به انرژی های بالا معرفی شده است، در نظر گرفتن گراویتون های جرم دار در این نظریه است. برای این کار عبارت جرم گراویتون (m) را به کنش اینشتین- هیلبرت به صورت کمترین جفت شدگی اضافه می کنیم به طوری که در حد $m \rightarrow 0$ نسبیت عام حاصل شود. از امتیازاتی که در نظر گرفتن گرانج جرم دار دارد این است که می توان بدون استفاده از ثابت کیهان- شناسی، انبساط شتاب دار عالم را توجیه کرد [۱۳ و ۱۴]. انواع سیاهچاله ها و ترمودینامیک، گذار فاز و پایداری دمایی آن ها در حضور گرانج جرم دار در [۱۵ و ۱۶] مورد بررسی قرار گرفته است. بعلاوه، وجود گراویتون های جرم دار بر سرعت انتشار امواج گرانژی و تولید امواج گرانژی در دوره تورم تأثیر می گذارد [۱۷ و ۱۸]. ما در این مقاله هر دو تعمیم را برای نسبیت عام در نظر گرفته و گرانج جرم دار رنگین کمانی را بررسی می کنیم. سپس معادلات ژئودزیک را بدست آورده و چند مدار ممکن را رسم می کنیم. سپس تأثیرات توابع رنگین کمانی و کمیت جرم گراویتون را مورد بررسی قرار می دهیم.

گرانج جرم دار رنگین کمانی

لاگرانژی گرانج جرم دار در فضازمان ۴- بعدی را به صورت زیر در نظر می گیریم [۱۹ و ۲۰]:

$$L = R - 2\Lambda - F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + m^2\sum_{i=1}^4c_iU_i(g, f) \quad (2)$$

که در آن R و m به ترتیب اسکالر ریچی و کمیت گرانج جرم- دار، f یک تانسور متقارن ثابت و Λ ثابت کیهان شناسی است. همچنین $F_{\mu\nu} = \partial_{\mu}A_{\nu} - \partial_{\nu}A_{\mu}$ تانسور میدان الکترومغناطیسی و A_{μ} پتانسیل پیمانه ای می باشد. لازم به ذکر است که در رابطه ی (۲)، c_i ها ثابت هستند و U_i ها چند جمله ای های متقارن از ویژه مقادیر یک ماتریس 4×4 به شکل $K_{\nu}^{\mu} = \sqrt{g^{\mu\alpha}f_{\alpha\nu}}$ می باشند که به صورت زیر نوشته می شوند:

$$\begin{aligned} U_1 &= [K], \quad U_2 = [K]^2 - [K^2], \\ U_3 &= [K]^3 - 3[K][K^2] + 2[K^3], \\ U_4 &= [K]^4 - 6[K^2][K]^2 + 8[K^3][K] + 3[K^2]^2 - 6[K^4], \end{aligned} \quad (3)$$

با استفاده از (۲)، معادلات میدان به صورت زیر بدست می آیند:

برای بدست آوردن معادله حرکت مختصه r ، از معادلات (۸) و (۱۰) داریم:

$$\left(\frac{dr}{d\lambda}\right)^2 = E^2 f(\varepsilon)^2 g(\varepsilon)^2 - \left[\varepsilon + \left(\frac{h}{r} g(\varepsilon)\right)^2 \right] g(\varepsilon)^2 \psi(r) \quad (11)$$

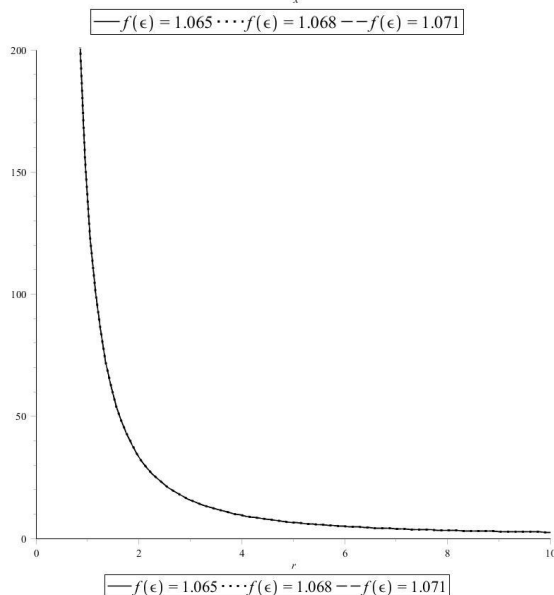
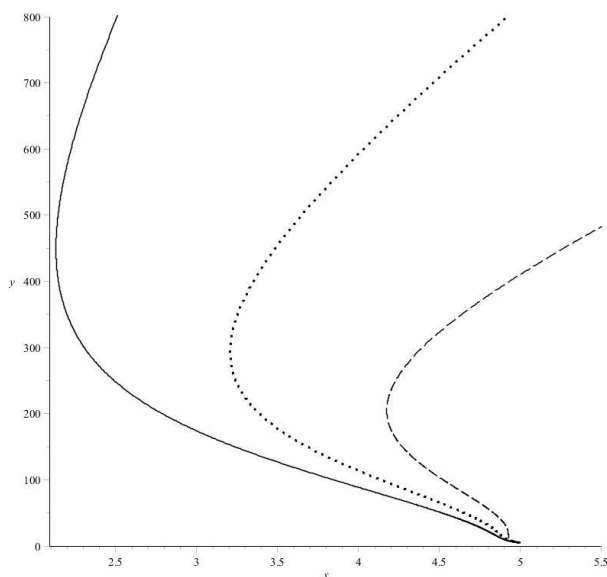
معادلات (۱۰) و (۱۱) به صورت کامل دینامیک را توصیف می کنند. با در نظر گرفتن $(E')^2 = E^2 f(\varepsilon)^2 g(\varepsilon)^2$ به صورت انرژی جدید ذره، می توان پتانسیل مؤثر را به شکل زیر معرفی کرد:

$$V_{eff} = \frac{1}{2} \left[\varepsilon + \left(\frac{h}{r} g(\varepsilon)\right)^2 \right] g(\varepsilon)^2 \psi(r) \quad (12)$$

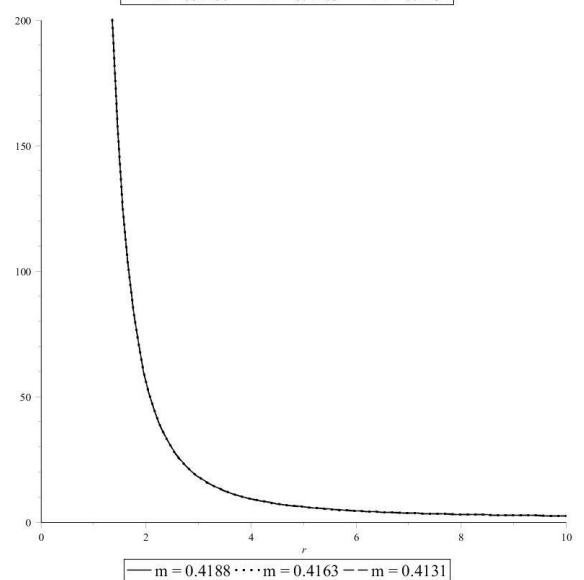
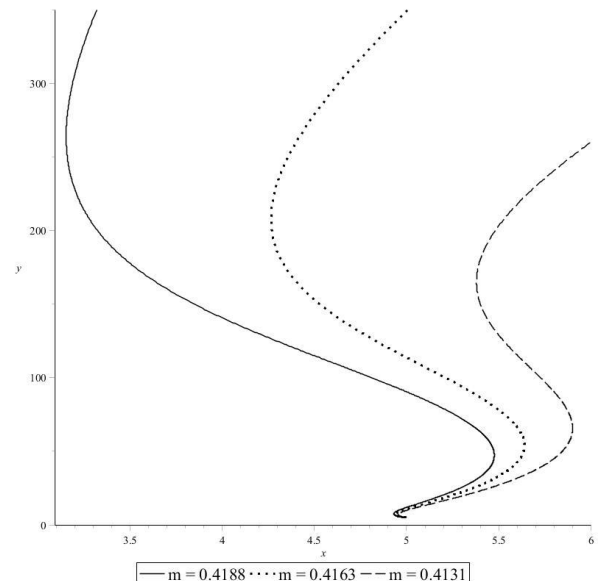
که در آن $\dot{x}'' = \frac{dx''}{d\lambda}$ است. در اینجا ما حرکت در صفحه‌ی $\theta = \frac{\pi}{2}$ را بررسی می کنیم. با استفاده از رابطه‌ی (۹) ثابت های حرکت را به صورت زیر بدست می آوریم:

$$\left(\frac{r^2}{g(\varepsilon)^2}\right) \frac{d\varphi}{d\lambda} = h, \quad \left(\frac{\psi(r)}{f(\varepsilon)^2}\right) \frac{dt}{d\lambda} = E \quad (10)$$

که E و h به ترتیب انرژی و تکانه‌ی زاویه‌ای می باشند. در مورد ذره‌ی جرم دار، مقادیر E و h انرژی و تکانه‌ی زاویه‌ای بر واحد جرم هستند.



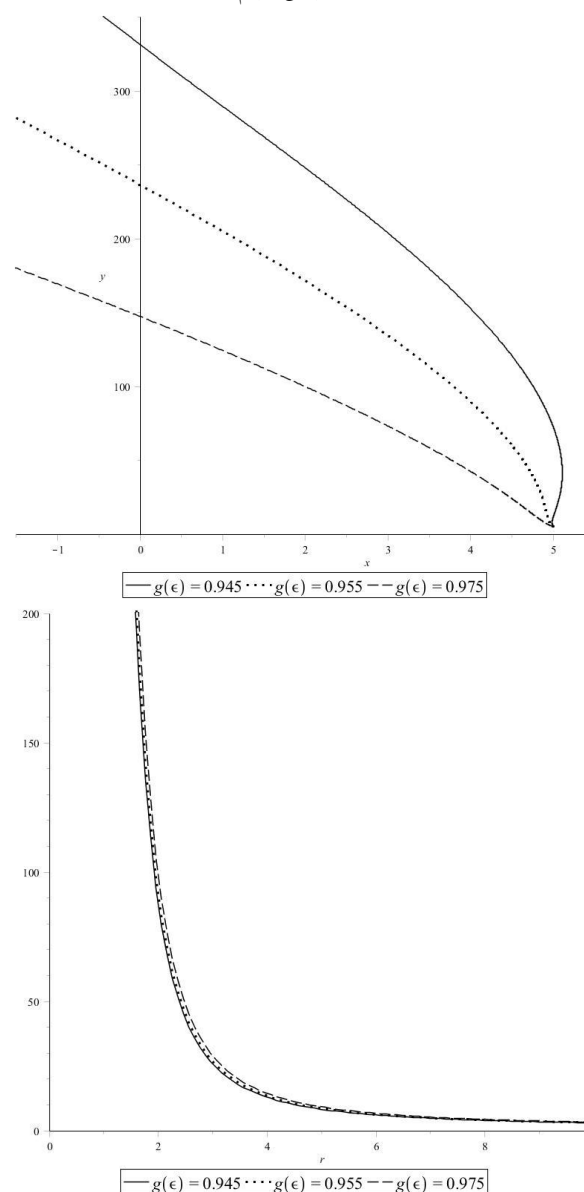
شکل (۳): مسیر حرکت (بالا) و پتانسیل مؤثر (پایین) به ازای مقادیر مختلف $f(\varepsilon)$
 $e = 1, E = 3.20, \Lambda = 0.000931, m_0 = 0.16, m = 0.42, h = 15, g(\varepsilon) = 1,$
 $c = 1.24, c_1 = 0.46, c_2 = 0.27, q = 0.48$



شکل (۴): مسیر حرکت (بالا) و پتانسیل مؤثر (پایین) به ازای مقادیر مختلف m
 $e = 1, E = 2.99, \Lambda = 0.00122, m_0 = 0.33, h = 11, f(\varepsilon) = 1, g(\varepsilon) = 1,$
 $c = 1.03, c_1 = 0.99, c_2 = 1.79, q = 3$

مسیر حرکت و پتانسیل مؤثر

برای سهولت، ما حرکت ذره آزمون را به صورت عددی بررسی می‌کنیم. با انتخاب مقادیر مختلف m ، $f(\epsilon)$ و $g(\epsilon)$ و همچنین شرایط اولیه ی یکسان، انواع مختلف مسیرهای حرکت را رسم می‌کنیم. سپس برای هر مورد، پتانسیل مؤثر را رسم کرده تا اثر این کمیت‌ها بر پتانسیل را مورد بررسی قرار دهیم. این کار همچنین کمک می‌کند تا از صحت جواب‌های بدست آمده اطمینان حاصل شود. نتایج تحلیل عددی معادلات ژئودزیک زمان‌گونه در شکل (۶-۱) نشان داده شده است. در تمامی حالت‌ها، شرایط اولیه $r(0) = 5\sqrt{2}$ و $\varphi(0) = \frac{\pi}{4}$ را در نظر می‌گیریم.



شکل (۵): مسیر حرکت (بالا) و پتانسیل مؤثر (پایین) برای مقادیر مختلف $g(\epsilon)$
 $e = 1$, $E = 4.08$, $\Lambda = 0.000344$, $m_0 = 2$, $m = 0.41$, $h = 19$, $f(\epsilon) = 1$,
 $c = 0.5$, $c_1 = 1.50$, $c_2 = 0.23$, $q = 3$

در شکل (۱) اثرات تغییر پارامتر جرم گراویتون را بررسی می‌کنیم. همان‌طور که نشان داده شده است، تغییر اندک این پارامتر باعث انحرافات زیادی در مسیر حرکت ذره می‌شود اما برخلاف آن تغییر ناچیزی در پتانسیل مؤثر مشاهده می‌شود (شکل (۲)). در شکل‌های (۳) و (۴) تنها پارامتر $f(\epsilon)$ را تغییر دادیم که مانند پارامتر m تغییر اندک آن مسیر حرکت ذره را بسیار تغییر می‌دهد در حالی که پتانسیل مؤثر به میزان خیلی کمی تغییر می‌کند. همچنین تغییرات مسیر حرکت و پتانسیل مؤثر به‌ازای مقادیر مختلف $g(\epsilon)$ در شکل‌های (۵) و (۶) نیز نشان داده شده است که نتایجی مشابهی با موارد قبلی دارد.

نتیجه‌گیری

در این مقاله معادلات ژئودزیک را در گرانج جرم‌دار رنگین-کمانی بررسی کردیم. معادلات ژئودزیک را در صفحه‌ی استوایی در نظر گرفته و نقش کمیت‌های مختلف را در حرکت ذره بررسی کردیم. شکل‌های رسم شده گویای این نتیجه است که می‌توان مسیرهای مختلفی را با تغییر اندک یکی از کمیت‌های مورد نظر بدست آورد. نتایج این مقاله می‌تواند در مطالعات آینده در زمینه‌ی ژئودزیک‌ها و بررسی اثرات گرانج جرم‌دار رنگین کمانی بسیار مفید باشد.

مرجع‌ها

- [1] M. Akbar and R. G. Cai, *Phys. Lett. B* **648**, 243 (2007).
- [2] D. Lovelock, *J. Math. Phys.* **12**, 498 (1971).
- [3] J. Magueijo and L. Smolin, *Class. Quant. Grav.* **21**, 1725 (2004).
- [4] D. Birmingham, S. Mokhtari and I. Sachs, *Phys. Rev. D* **82**, 124059 (2010).
- [5] X. Calmet, S. Hossenfelder and R. Percacci, *Phys. Rev. D* **82**, 124024 (2010).
- [6] C. Leiva, J. Saavedra and J. Villanueva, *Mod. Phys. Lett. A* **24**, 1443 (2009).
- [7] R. Garattini and B. Majumder, *Nucl. Phys. B* **884**, 125 (2014).
- [8] A. F. Ali, M. Faizal and M. M. Khalil, *JHEP* **12**, 159 (2014).
- [9] P. Galan and G. A. M. Marugan, *Phys. Rev. D* **74**, 044035 (2006).
- [10] Y. Gim and W. Kim, *JCAP* **05**, 002 (2015).
- [11] S. H. Hendi, S. Panahiyan, B. Eslam Panah and M. Momennia, *Eur. Phys. J. C* **76**, 150 (2016).
- [12] A. S. Sefiedgar, [arXiv:1512.08372].
- [13] K. Hinterbichler, *Rev. Mod. Phys.* **84**, 671 (2012).
- [14] C. Deffayet, *Phys. Lett. B* **502**, 199 (2001).
- [15] R. G. Cai, Y. P. Hu, Q. Y. Pan and Y. L. Zhang, *Phys. Rev. D* **91**, 024032 (2015).
- [16] S. H. Hendi, S. Panahiyan and B. Eslam Panah, *JHEP* **01**, 129 (2016).
- [17] M. Mohseni, *Phys. Rev. D* **84**, 064026 (2011).
- [18] A. E. Gumrukcuoglu et al., *Class. Quant. Grav.* **29**, 235026 (2012).
- [19] D. Vegh, [arXiv:1301.0537].
- [20] S. H. Hendi, B. Eslam Panah, S. Panahiyan, *Phys. Lett. B* **769**, 191 (2017).