

اثرات گرانش جرم‌دار بر ژئودزیک‌های فضا‌زمان (۲+۱) بعدی

هندی، سید حسین؛ توکلی، امیر محمد؛ مؤمن‌نیا، مه‌راب

بخش فیزیک و رصد خانه ابوریحان بیرونی، دانشکده علوم، دانشگاه شیراز، شیراز ۷۱۴۵۴

چکیده

در این مقاله جواب‌های گرانش جرم‌دار را در ۳ بعد مورد مطالعه قرار داده و تأثیر جرم‌دار شدن گراویتون‌ها را بر معادلات ژئودزیک بررسی می‌کنیم. با استفاده از فرمول‌بندی لاگرانژی، معادلات ژئودزیک را استخراج می‌نماییم. در ادامه با توجه به حل عددی، به دنبال یافتن جواب‌های معادلات ژئودزیک خواهیم بود. در این رابطه، چندین مدار جالب توجه را رسم می‌کنیم تا اثرات پارامترهای مختلف را بر روی منحنی‌های ژئودزیک بیابیم. در نهایت درخواست می‌کنیم که هرچند گرانش جرم‌دار اثر قابل توجهی بر منحنی‌های ژئودزیک دارد ولی تأثیر آن بر پتانسیل مؤثر کمتر مشهود است.

The effects of massive gravity on the geodesics of (2+1)-dimensional spacetime

Hendi, Seyed Hossein; Tavakkoli, Amir Mohammad; Momennia, Mehrab

Physics Department and Biruni Observatory, College of Sciences, Shiraz University 71454, Shiraz

Abstract

In this paper, we study the solutions of massive gravity in three dimensions and investigate the effects of massive gravitons on the geodesic equations. Following the Lagrangian formalism, we can derive all geodesic equations. Then, by considering numerical analysis, we look for the solution of geodesic equations. In this regard, we plot some interesting orbits to find the effects of various parameters on the geodesic curves. We find that although the massive gravity has significant effect on the geodesic curves, its influence on the effective potential is less evident.

PACS No. 04

مقدمه

تحت هموارریختی^۱ را می‌شکند و انرژی-تکانه در گرانش جرم-دار دیگر پایسته نیست.

از سوی دیگر، گرانش جرم‌دار مورد آزمون‌هایی قرار گرفته و نتایج جالبی نیز بدست آمده است. برای مثال، شتاب کنونی عالم را می‌توان بدون استفاده از ثابت کیهان‌شناسی و با در نظر گرفتن گرانش جرم‌دار توجیه کرد [1,2,3]. بعلاوه، ذرات با اسپین ۲ جرم‌دار، می‌توانند کاندیدهای مناسبی برای ماده تاریک به دلیل رفتار مشابه تانسور انرژی-تکانه آن‌ها با سیال ماده تاریک باشند [4,5]. لازم به ذکر است که مطالعات در زمینه‌ی نظریه‌ی ریسمان و گرانش کوانتومی حضور گراویتون جرم‌دار را پیش‌بینی

نسبیت عام در توصیف پدیده‌های مختلف در انرژی‌های پایین بسیار موفق بوده است، اما با وجود موفقیت‌های فراوان این نظریه، موضوعاتی در حوزه فیزیک انرژی‌های بالا وجود دارد که نشان می‌دهد این نظریه باید اصلاح شود (به عنوان نمونه می‌توان به افت و خیزهای کوانتومی اشاره کرد). یکی از راه‌های پیشنهادی آن است که نسبیت عام را به شیوه‌ای اصلاح کرد که شامل گراویتون-های جرم‌دار شود. ساده‌ترین راه برای ساختن گرانش جرم‌دار آن است که عبارت جرم گراویتون (m) را به کنش اینشتین-هیلبرت اضافه کرد، به طوری که در حد $m \rightarrow 0$ نسبیت عام حاصل شود. باید توجه داشت که جمله‌ی مربوط به جرم گراویتون ناوردایی

¹ Diffeomorphism

می‌کند [6,7]. اثرات احتمالی گراویتون‌های جرم‌دار بر امواج گرانشی نیز در دوره تورم مورد مطالعه قرار گرفته است [8]. گرانش جرم‌دار در حوزه‌ی اخت‌فیزیک نیز مورد بررسی قرار گرفته است. برای مثال، بیشینه جرم برای ستاره‌های نوترونی را می‌توان بیش از $3M_{Sun}$ بدست آورد [9]. بعلاوه می‌توان کمیت‌های ترمودینامیکی سیاهچاله‌ها را نیز اصلاح کرد [10,11,12].

برخی از مشکلات نظریه‌ی گرانش جرم دار نظیر وجود ذره شبح گونه^۲ و مشکل حد بازجفتی^۳ در یک نظریه غیرخطی هموردای چهاربعدی در مرجع [13] مورد بازنگری قرار گرفته و برای آنها راه حل‌هایی پیشنهاد شده است. ما در این مقاله گرانش جرم‌دار مطالعه شده در مرجع [14] را در نظر گرفته، معادلات ژئودزیک را بدست می‌آوریم. سپس مدارهای ممکن را رسم و تأثیر پارامتر m را در هر کدام بررسی می‌کنیم.

گرانش جرم دار

کنش گرانش جرم دار در فضا زمان ۳- بعدی به صورت زیر است [15]:

$$I = -\frac{1}{16\pi} \int d^3x \sqrt{-g} \left[R - 2\Lambda - F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + m^2 \sum_{i=1}^3 c_i U_i(g, f) \right] \quad (1)$$

که در آن R اسکالر ریچی، m پارامتر گرانش جرم‌دار، f یک تانسور متقارن ثابت و Λ ثابت کیهان‌شناسی است. همچنین $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ تانسور میدان الکترومغناطیسی و A_μ پتانسیل پیمانه‌ای می‌باشد. لازم به ذکر است که در رابطه‌ی (۱)، c_i ها ثابت هستند و U_i ها چند جمله‌ای‌های متقارن از ویژه مقادیر یک ماتریس 3×3 به شکل $K_\nu^\mu = \sqrt{g^{\mu\alpha} f_{\alpha\nu}}$ می‌باشند که به صورت زیر نوشته می‌شوند:

$$\begin{aligned} U_1 &= [K], & U_2 &= [K]^2 - [K^2], \\ U_3 &= [K]^3 - 3[K][K^2] + 2[K^3], \end{aligned} \quad (2)$$

با استفاده از (۱)، معادلات میدان به صورت زیر بدست می‌آیند:

$$\begin{aligned} R_{\mu\nu} - \left(\frac{R}{2} - \Lambda \right) g_{\mu\nu} - \left(2F_{\mu\alpha} F_\nu^\alpha - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} F^2 \right) + m^2 \chi_{\mu\nu} &= 0 \\ \partial_\mu (\sqrt{-g} F^{\mu\nu}) &= 0 \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \chi_{\mu\nu} &= -\frac{c_1}{2} (U_1 g_{\mu\nu} - K_{\mu\nu}) - \frac{c_2}{2} (U_2 g_{\mu\nu} - 2U_1 K_{\mu\nu} + 2K_{\mu\nu}^2) \\ &\quad - \frac{c_3}{2} (U_3 g_{\mu\nu} - 3U_2 K_{\mu\nu} + 6U_1 K_{\mu\nu}^2 - 6K_{\mu\nu}^3) \end{aligned} \quad (4)$$

با در نظر گرفتن متریک مرجع مناسب بصورت $f_{\mu\nu} = \text{diag}(0, 0, c^2)$ در سه بعد، تنها جمله‌ی $U_1 = \frac{c}{r}$ غیر صفر است که در آن c یک ثابت مثبت است و باقی جمله‌ها صفر می‌باشند. ما به جواب‌های استاتیک باردار به صورت زیر علاقه‌مند هستیم:

$$ds^2 = -\psi(r) dt^2 + \frac{dr^2}{\psi(r)} + r^2 d\varphi^2 \quad (5)$$

که با استفاده از معادله‌های (۳) و (۵) می‌توان $\psi(r)$ را محاسبه کرد:

$$\psi(r) = -\Lambda r^2 - m_0 - 2q^2 \ln\left(\frac{r}{l}\right) + m^2 c_1 c r \quad (6)$$

که در آن q یک ثابت انتگرال‌گیری متناسب با بار الکتریکی کل، l یک ثابت دلخواه دارای بعد طول و m_0 ثابت انتگرال‌گیری مربوط به جرم کل سیاهچاله است.

معادلات ژئودزیک

برای بدست آوردن معادلات ژئودزیک، لاگرانژی را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$L = \varepsilon = -g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda} \quad (7)$$

که در آن λ پارامتر آفین و ε برای ذره بدون جرم برابر با صفر و برای ذره جرم‌دار مقدار آن یک است. باید توجه داشت که برای ذره جرم‌دار $\lambda = \tau$ می‌باشد، که τ زمان ویژه است. برای حل معادله‌ی (۷) از رابطه‌ی اوایلر- لاگرانژ استفاده می‌کنیم:

$$\frac{d}{d\lambda} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\mu} \right) - \frac{\partial L}{\partial x^\mu} = 0, \quad \dot{x}^\mu = \frac{dx^\mu}{d\lambda}. \quad (8)$$

معادلات مربوط به مختصات t و φ به صورت زیر هستند:

$$r^2 \frac{d\varphi}{d\lambda} = h \quad (9)$$

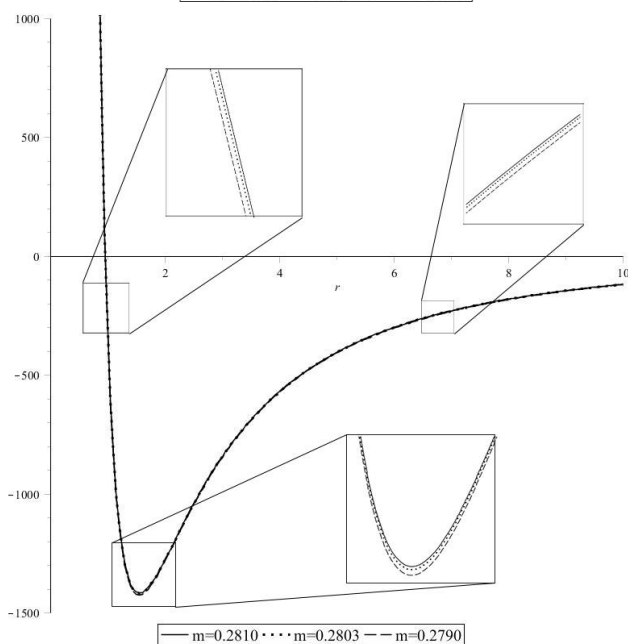
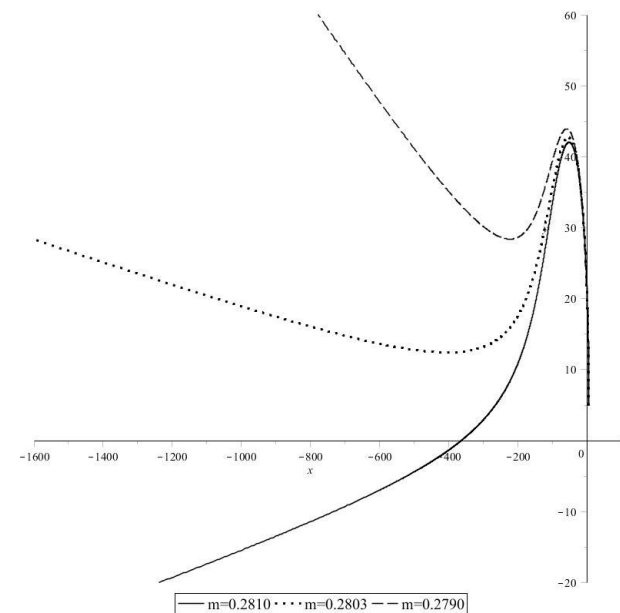
$$\left[-\Lambda r^2 - m_0 - 2q^2 \ln\left(\frac{r}{l}\right) + m^2 c_1 c r \right] \frac{dt}{d\lambda} = E$$

برای ذره بدون جرم، E و h به ترتیب انرژی و تکانه‌ی زاویه‌ای می‌باشند. در مورد ذره‌ی جرم‌دار، مقادیر E و h انرژی و تکانه‌ی زاویه‌ای بر واحد جرم هستند. برای بدست آوردن معادله حرکت مختصه r ، از معادلات (۷) و (۹) داریم:

² Ghost like

³ Decoupling limit

کنیم تا از صحت جواب‌ها اطمینان حاصل شود. سپس مدارهای بدست آمده را با مقادیر مختلف m رسم می‌کنیم تا تحول آن‌ها را بررسی کنیم. در تمامی حالت‌ها، شرایط اولیه $r(0)=5\sqrt{2}$ و $\varphi(0)=\frac{\pi}{4}$ است.



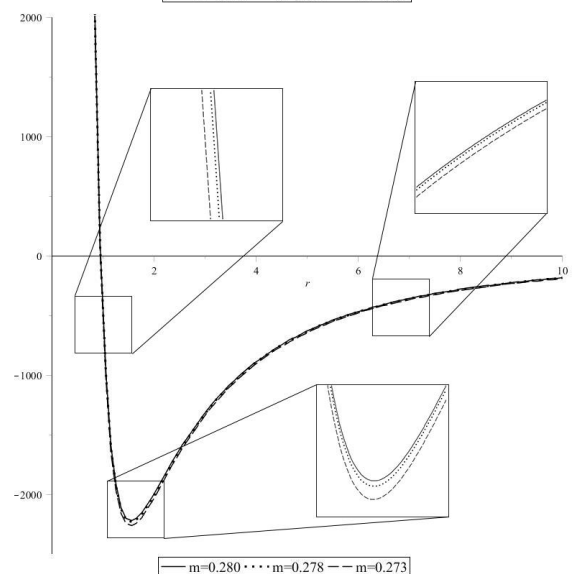
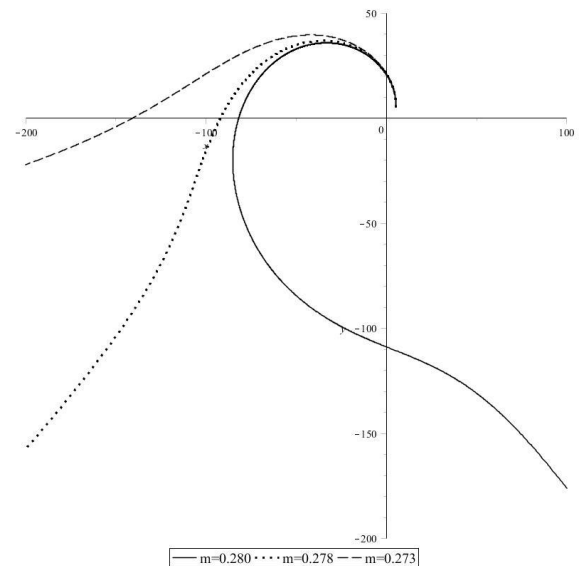
شکل (۲): مسیر حرکت ذره (بالا) و پتانسیل موثر (پایین) در حالت ۲
 $e=1, E=2.3, \Lambda=0.0005, m_0=0.18, h=80, l=1, c=1.6$
 $c_1=1.075, q=0.8$

حالت ۱: شکل (۱) در قسمت فوقانی نحوه‌ی فرار ذره جرم‌دار را از گرانش سیاهچاله نشان می‌دهد. نکته‌ی قابل توجه این است

$$\left(\frac{dr}{d\lambda}\right)^2 = E^2 - \left[\varepsilon + \left(\frac{h}{r}\right)^2\right] \left(-\Lambda r^2 - m_0 - 2q^2 \ln\left(\frac{r}{l}\right) + m^2 c_1 c r\right) \quad (10)$$

و همچنین می‌توان پتانسیل مؤثر را به شکل زیر معرفی کرد:

$$V_{eff} = \left[\varepsilon + \left(\frac{h}{r}\right)^2\right] \left(-\Lambda r^2 - m_0 - 2q^2 \ln\left(\frac{r}{l}\right) + m^2 c_1 c r\right) \quad (11)$$

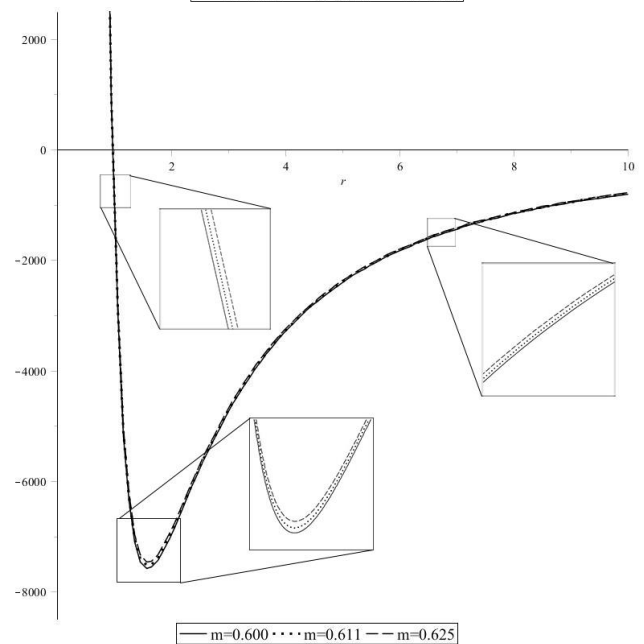
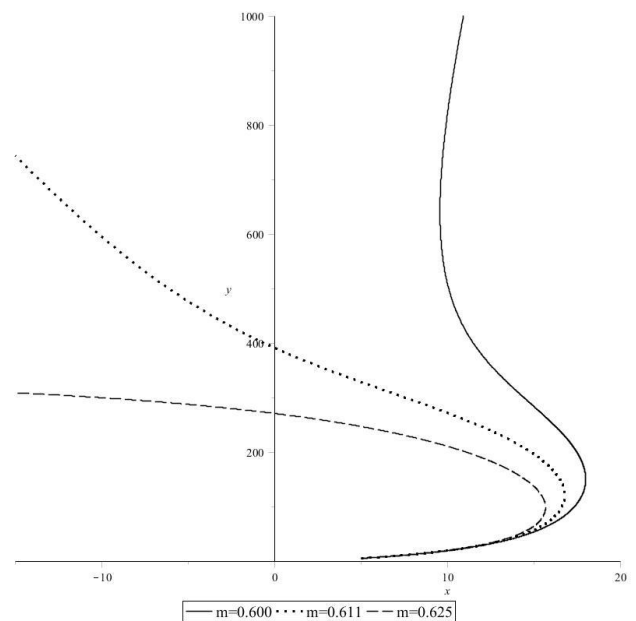


شکل (۱): مسیر حرکت ذره (بالا) و پتانسیل موثر (پایین) در حالت ۱
 $e=1, E=2.2, \Lambda=0.0005, m_0=0.18, h=100, l=1, c=1.6$
 $c_1=1.075, q=0.8$

مدارها

حل تحلیلی معادلات (۹) و (۱۰) پیچیده و دشوار است. لذا برای بدست آوردن جواب این معادلات آن‌ها را به صورت عددی حل می‌کنیم. برای هر حالت، نمودار پتانسیل مؤثر را نیز رسم می-

که m پارامتری تأثیرگذار بر مسیر ذره است. در پایین شکل (۱) پتانسیل مؤثر رسم شده که در سه مسیر رفتار تقریباً یکسانی دارد.



شکل (۳): مسیر حرکت ذره (بالا) و پتانسیل مؤثر (پایین) در حالت ۳

$$e=1, E=5, \Lambda=0.0005, m_0=0.5, h=80, l=1, c=1.5$$

$$c_1=0.6, q=1.8$$

حالت ۲: در این حالت نیز که در شکل (۲) نمایش داده شده است، پارامتر m تأثیرگذار است و شکل مسیرها را به طور قابل توجهی تغییر می‌دهد. پتانسیل مؤثر نیز در همین شکل رسم شده است و تأثیرات پارامتر m در آن به وضوح دیده می‌شود.

حالت ۳: تغییر پارامتر m در مسیر فرار ذره از سیاهچاله بسیار تأثیرگذار است که در شکل (۳) نشان داده شده است. همچنین مقدار $m=0.625$ مداری بیضی وار و غیر بسته را نشان می‌دهد. پتانسیل مؤثر ذره نیز در پایین همین شکل رسم شده است. نکته قابل ذکر آنست که در رسم پتانسیل مؤثر، لزوماً باید دامنه وسیعی انتخاب شود تا رفتار آن به درستی دیده شود. به دلیل انتخاب این دامنه ی وسیع، تأثیر تغییرات پارامتر m بخوبی دیده نمی‌شود. البته بزرگنمایی‌های انجام شده در شکلها تفکیک لازم را آشکار می‌سازد.

نتیجه گیری

در این مقاله ما معادلات ژئودزیک در گرانش جرم‌دار را مطالعه نموده و معادلات را به صورت عددی حل کردیم. همچنین نشان دادیم که پارامتر m ، که در گرانش جرم‌دار به معادلات وارد می‌شود، بر مسیر حرکت ذرات تأثیرگذار است و این اثر را با مثال‌های مختلف نشان دادیم. اثر پارامتر m بر مسیر حرکت ذره بسیار زیاد بود اما به نظر می‌رسد که پتانسیل مؤثر را به میزان کمتری تغییر می‌دهد. جهت مقایسه صحیح پتانسیل مؤثر با رفتار ژئودزیک، می‌توان رفتار پتانسیل مؤثر را بر اساس پارامتر آفین (به جای $r(\lambda)$) مورد مطالعه قرار داد. نتایج این مقاله می‌تواند در مطالعات آینده بر روی موضوع گرانش جرم‌دار بسیار مفید باشد.

مرجع‌ها

- [1] K. Hinterbichler, *Rev. Mod. Phys.* **84**, 671 (2012).
- [2] C. Deffayet, *Phys. Lett. B* **502**, 199 (2001).
- [3] C. Deffayet, G. Dvali, and G. Gabadadze, *Phys. Rev. D* **65**, 044023 (2002).
- [4] K. Aoki and S. Mukohyama, *Phys. Rev. D* **94**, 024001 (2016).
- [5] E. Babichev et al., *Phys. Rev. D* **94**, 084055 (2016).
- [6] G. 't Hooft, [arXiv:0708.3184v4].
- [7] C. P. Burgess et al., *JHEP* **04**, 053 (2008).
- [8] A. E. Gumrukcuoglu, S. Kuroyanagi, C. Lin, S. Mukohyama and N. Tanahashi, *Class. Quantum Grav.* **29**, 235026 (2012).
- [9] S. H. Hendi, G. H. Bordbar, B. E. Panah and S. Panahiyan, [arXiv:1701.01039].
- [10] A. Bouchareb and G. Clement, *Class. Quantum Grav.* **24**, 5581 (2007).
- [11] F. Capela and P. G. Tinyakov, *JHEP* **04**, 042 (2011).
- [12] M. S. Volkov, *Lect. Notes Phys.* **892**, 161 (2015).
- [13] C. de Rham, G. Gabadadze and A. J. Tolley, *Phys. Rev. Lett.* **106**, 231101 (2011).
- [14] D. Vegh, [arXiv:1301.0537].
- [15] S. H. Hendi, S. Panahiyan, S. Upadhyay and B. E. Panah, *Phys. Rev. D* **95**, 084036 (2017).